

Chapitre 9 : Dérivation globale

I. Dérivées des fonctions usuelles

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout réel x de I .

Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x^3$

Démonstrations au programme :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ soit } h \neq 0, \\
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
 &= \frac{(x+h+x)(x+h-x)}{h} \\
 &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
 &= \frac{h(2x+h)}{h} \\
 &= 2x+h
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) &= 2x \\
 \text{Donc } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\
 \text{et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= 2x
 \end{aligned}$$

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Montrons que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, soit $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{x - x - h}{h \cdot x(x+h)} \\ &= \frac{-h}{h \cdot x(x+h)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{x^2 + xh}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2}$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

II. Opérations sur les fonctions dérivées

1) Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstration au programme pour le produit uv :

Soit $x \in I$, $h \neq 0$ t.q. $x+h \in I$

$$\begin{aligned} \frac{uv(x+h) - uv(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - v(x)u(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - v(x)u(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \end{aligned}$$

Donc uv est dérivable sur I et $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \forall x \in I$

Exemples :

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = (2x^2 + 5x)(3x - 1) \quad 2) g(x) = \frac{6x-5}{2x^2+1}$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$u: x \mapsto 2x^2 + 5x \quad u'(x) = 4x + 5$$

$$v: x \mapsto 3x - 1 \quad v'(x) = 3$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= (4x + 5)(3x - 1) + (2x^2 + 5x)3$$

$$= 12x^2 - 4x + 15 - 5 + 6x^2 + 15x$$

$$= 18x^2 - 4x + 10$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}: g(x) = \frac{6x-5}{2x^2+1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$u: x \mapsto 6x - 5 \quad u'(x) = 6$$

$$v: x \mapsto 2x^2 + 1 \quad v'(x) = 4x$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$= \frac{6(2x^2+1) - (6x-5)(4x)}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 6 - 24x^2 + 20x}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-12x^2 + 20x + 6}{(2x^2+1)^2}$$

2) Composée de dérivées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$f(ax + b)$	f dérivable sur I	$af'(ax + b)$

Exemple : $g(x) = \sqrt{4x-2}$, $x \geq \frac{1}{2}$

$$g(x) = f(4x-2) \text{ avec } f: x \mapsto \sqrt{x}$$

$$g'(x) = 4f'(4x-2)$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x-2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-2}}, \quad x > \frac{1}{2}$$

III. Cas de la fonction valeur absolue

1) Valeur absolue d'un nombre (rappels)

Définition : La **valeur absolue** d'un nombre a est égal au nombre a si a est positif, et au nombre $-a$ si a est négatif.

La valeur absolue de a se note $|a|$.

Exemple :

$$|2| = 2$$

$$|-8| = 8$$

2) Fonction valeur absolue

Définition : La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

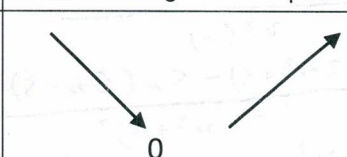
Propriété : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

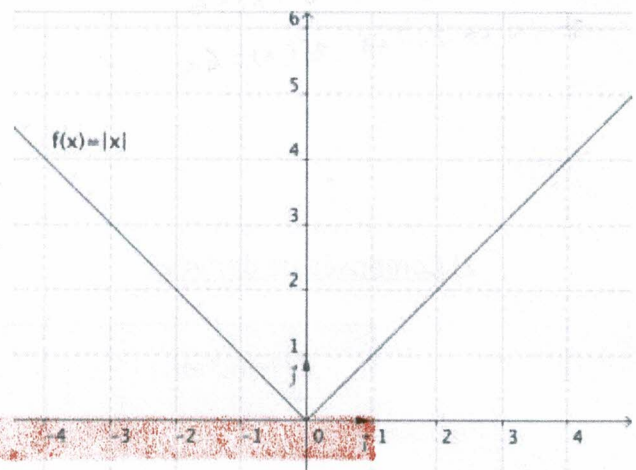
Éléments de démonstration :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{sur }]-\infty ; 0] \\ x & \text{sur } [0 ; +\infty[\end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[0 ; +\infty[$, la fonction f est une fonction affine.

Représentation graphique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x $			



Remarque :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La fonction $x \mapsto |x|$ est donc paire.

3) Étude de la dérivabilité en 0 :

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = |x|$.

On calcule le taux de variation de f en 0 :

$$\text{- Si } h > 0, \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{- Si } h < 0, \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$1 \neq -1$, donc f n'est pas dérivable en 0 (deux limites particulières)

IV. Étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3x^2 + 9x - 12 \\ \Delta &= 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) \\ &= 81 + 144 \\ &= 225 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \quad 2 \text{ solutions} \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -4 \end{aligned}$$

Comme $a = 3 > 0$ on a :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
f			↗	↘

Diagram showing the sign of $f'(x)$ and the behavior of f around the critical points $x = -4$ and $x = 1$. Arrows indicate that f is increasing on $(-\infty, -4)$, decreasing on $(-4, 1)$, and increasing on $(1, +\infty)$.

V. Extremum d'une fonction

Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- f admet un maximum en a sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. Le maximum vaut $f(a)$ et est atteint en a .
- f admet un minimum en a sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$. Le minimum vaut $f(a)$ et est atteint en a .

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Soit $a \in I$ et qui n'est pas une borne de I .

Si f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration :

Supposons que f admet un maximum en $a \in I$.

Soit h non nul, $h > 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \text{ car } f(a) \geq f(a+h)$$

$$\text{Si } h < 0, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

f est dérivable en a , par passage à la limite $\xrightarrow{h \rightarrow 0}$, $f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$, donc $f'(a) = 0$

Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = 0$$

Or f $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$, pas d'extremum en 0.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

$$f'(x) = 5 \times 2x - 3$$

$$= 10x - 3$$

$$10x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

$$m = 10 > 0$$

$$f\left(\frac{3}{10}\right) = 3,55$$

f admet un minimum en $x = \frac{3}{10}$, qui a pour valeur 3,55.